

实验 4.4 波尔共振的研究

在机械制造和建筑工程等科技领域中受迫振动所导致的共振现象常常引起工程技术人员的极大注意，这主要是由于它的破坏作用，但利用得当也有许多实用价值，众多电声器件就是运用共振原理来设计制作的，此外，在微观科学研究中“共振”也是一种重要研究手段，例如利用核磁共振和顺磁共振研究物质结构等。振动现象不仅在经典物理学中有着广泛的应用，而且在量子物理中也常以振动形式来模拟原子与基本粒子的运动。

表征受迫振动性质的是受迫振动的振幅频率特性和相位频率特性（简称幅频特性和相频特性）。本实验通过波尔共振实验仪来系统研究自由振动、阻尼振动和受迫振动。

【实验目的】

1. 利用波尔摆，定量观测自由振动、阻尼振动、受迫振动、磁阻尼、拍频等振动现象。
2. 研究波尔振动的幅频特性和相频特性以及共振现象。
3. 通过用数据采集器和转动传感器观测波尔振动现象，学习传感器的基本原理。
4. 观测波尔振动的频谱特性。

【实验仪器】

基于 LV 和转动传感器波尔共振仪、直流稳压稳流电源、秒表、安装了用 LabVIEW 编写的测控程序的计算机。

【实验原理】

本实验拟采用波尔共振实验仪（扭摆）定量研究多种与振动有关的物理量和规律。

1. 扭摆的阻尼振动和自由振动

在有阻力矩的情况下，将扭摆在某一摆角位置释放，使其开始摆动。此时扭摆受到两个力矩的作用：一是扭摆的弹性恢复力矩 M_E ，它与扭摆的扭转角 θ 成正比，即 $M_E = -c\theta$ （ c 为扭转恢复力系数）；二是阻力矩 M_R ，在摆角不太大的情况下可近似认为它与摆动的角速度成正比，即 $M_R = -r(d\theta/dt)$ ，其中 r 为阻力矩系数。若扭摆的转动惯量为 I ，则根据转动定律可列出扭摆的运动方程：

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_E + M_R = -c\theta - r \frac{d\theta}{dt} \quad (4-44)$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{r}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{c}{I} \theta = 0 \quad (4-45)$$

令 $r/I = 2\beta$ （ β 称为阻尼系数）， $c/I = \omega_0^2$ （ ω_0 称为固有圆频率），则式（4-45）变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (4-46)$$

其解为

$$\theta = A_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t) = A_0 \exp(-\beta t) \cos(2\pi t / T) \quad (4-47)$$

其中， A_0 为扭摆的初始振幅， T 为扭摆作阻尼振动的周期，且 $\omega = 2\pi/T = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 。

由式（4-47）可见，扭摆的振幅随着时间按指数规律衰减。若测得初始振幅 A_0 及第 n 个周期时的振幅 A_n ，并测得摆动 n 个周期所用的时间 $t = nT$ ，则有

$$\frac{A_0}{A_n} = \frac{A_0}{A_0 \exp(-\beta n T)} = \exp(\beta n T) \quad (4-48)$$

所以

$$\beta = \frac{1}{nT} \cdot \ln \frac{A_0}{A_n} \quad (4-49)$$

若扭摆在摆动过程中不受阻力矩的作用，即 $M_R=0$ ，则式（4-46）左边第二项不存在， $\beta=0$ 。由式（4-48）可知，不论摆动的次数如何，均有 $A_n=A_0$ ，振幅始终保持不变，扭摆处于自由振动状态。

2. 扭摆的受迫振动

当扭摆在有阻尼的情况下还受到简谐外力矩的作用，就会作受迫振动。设外加简谐力矩的频率是 ω ，外力矩角幅度为 θ_0 ，则 $M_0=c\theta_0$ 为外力矩幅度，因此外力矩可表示为 $M_{ext}=M_0\cos(\omega t)$ 。扭摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{r}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{c}{I} \theta = \frac{M_{ext}}{I} = h \cos(\omega t) \quad (4-50)$$

其中， $h=M_0/I$ 。在稳态情况下，式（4-50）的解是

$$\theta = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4-51)$$

其中， A 为角振幅，由下式表示

$$A = \frac{h}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}} \quad (4-52)$$

而角位移 θ 与简谐外力矩之间的位相差 φ 则可表示为

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (4-53)$$

公式（4-51）说明，不论扭摆初始的振动状态如何，在简谐外力矩作用下，扭摆的振动都会逐渐趋于简谐振动，振幅为 A ，频率与外力矩的频率相同，但二者之间存在相位差 φ 。

（1）幅频特性

由式（4-52）可见，由于 $h=M_0/I=c\theta_0/I=\omega_0^2\theta_0$ ，当 $\omega \rightarrow 0$ 时，振幅 $A \rightarrow h/\omega_0^2$ ，接近外力矩角幅度 θ_0 。随着 ω 逐渐增大，振幅 A 随之增加，当 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时，振幅 A 有最大值，此时称为共振，此频率称为共振频率 ω_{res} 。当 $\omega > \omega_{res}$ 或 $\omega < \omega_{res}$ 时，振幅都将减小，当 ω 很大时，振幅趋于零。共振频率与阻尼的大小有关系，当 $\beta=0$ 时， $\omega_{res}=\omega_0$ 即扭摆的固有振动频率，但根据式（4-52），此时的振幅将趋于无穷大而损坏设备。故要建立稳定的受迫振动，必须存在阻尼。图 4-12 为不同阻尼状态下的幅频特性曲线示意图。

（2）相频特性

由式（4-53）可见，当 $0 \leq \omega \leq \omega_0$ 时，有 $0 \leq \varphi \leq (-\pi/2)$ ，即受迫振动的相位落后于外加简谐力矩的相位；在共振情况下，相位落后接近于 $\pi/2$ 。在 $\omega=\omega_0$ 时（有阻尼时不是共振状态），相位正好落后 $\pi/2$ 。当 $\omega > \omega_0$ 时，有 $\tan\varphi > 0$ ，此时应有 $\varphi < (-\pi/2)$ ，即相位落后得更多。当 $\omega \gg \omega_0$ 时， $\varphi \rightarrow (-\pi)$ ，接近反相。在已知 ω_0 及 β 的情况下，可由式（4-53）计算出各 ω 值所对应的 φ 值。图 4-13 为不同阻尼状态下的相频特性曲线示意图。

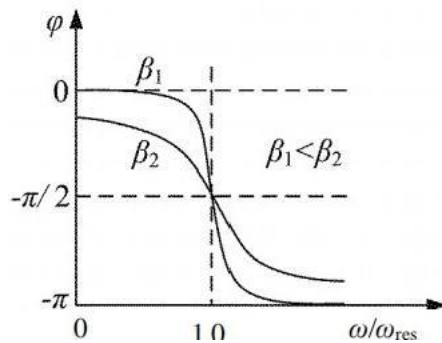
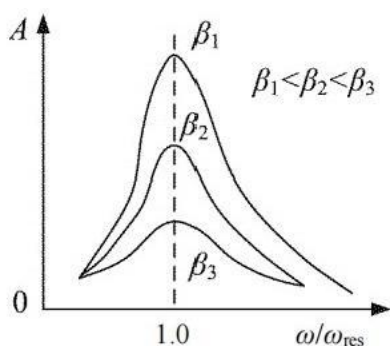


图4-12 不同阻尼状态下的幅频特性曲线 图4-13 不同阻尼状态下的相频特性曲线

3. 振动的频谱

任何周期性的运动均可分解为简谐振动的线性叠加。用数据采集器和转动传感器采集一组如图4-14摆动角度随时间变化的数据之后，对其进行傅立叶变换，可以得到一组相对振幅随频率的变化数据。以频率为横坐标，相对振幅为纵坐标可作出一条如图4-15即为波尔振动的频谱。在自由振动状态下，峰值对应的频率就是波尔振动仪的固有振动频率。

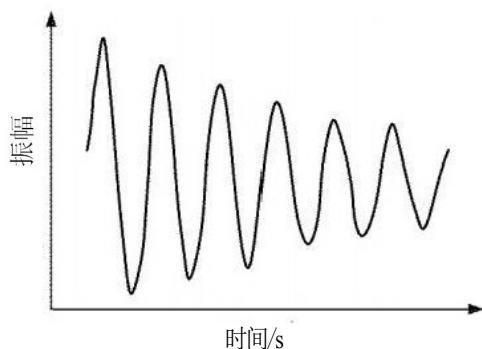


图4-14 角度随时间变化关系

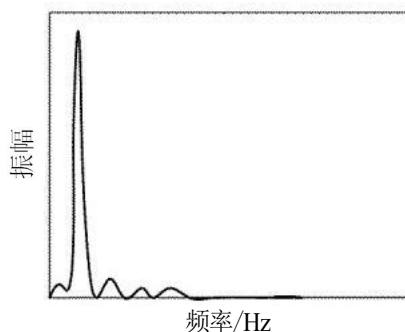


图4-15 振动的频谱

4. 拍频

当扭摆作受迫振动时，由于驱动力频率与扭摆固有振动频率不相等，所以在扭摆上施加简谐驱动力后，扭摆从初始运动状态逐渐过渡到受迫振动的稳定状态过程中，其运动为阻尼振动和受迫振动两种振动过程的叠加。由于两种振动过程的频率接近，将会出现“拍”的现象。若阻尼振动的频率为 ω_1 ，驱动力的频率为 ω_2 ，则扭摆的摆动角度随时间变化的关系曲线的振幅将会起伏变化，如图4-16所示，其包络线的频率约为 $|\omega_1 - \omega_2|$ ，即为拍频。在受迫振动状态下，频谱图会出现双峰，其中一个峰值对应的频率为波尔振动的固有振动频率，而另一个峰值对应的频率为驱动力矩的频率。在共振频率附近，双峰融合成单峰。

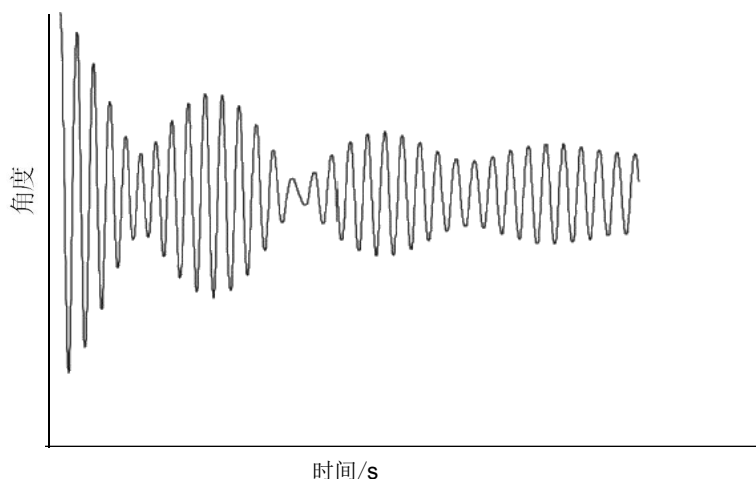


图4-16 “拍”的现象示意图

【实验内容与步骤】

波尔共振仪的电机、电磁铁分别与直流稳压稳流电源的 CH1、CH2 相连。

1. 自由振动：测量扭摆在自由状态下的固有振动频率，并测量自由状态下的阻尼系数 β 。

(1) 用手将扭摆的摆轮转动到某一不太大的初始角度 (30°) 使其偏离平衡位置，记录初始偏转角 (初始振幅)。

(2) 释放摆轮，让其自由摆动，观察摆动现象，用秒表记录摆轮来回摆动 10 个周期的时间 $10T$ 和振幅 A_n 。根据式 (4-49)，计算阻尼系数 β ；由 $\omega_0 = 2\pi/T$ ，计算摆轮的固有振动频率 ω_0 。

(3) 每隔 10° 增大初始振幅，重复步骤 (2)，共测量 10 次，如表 4-5 所示。计算不同初始振幅下的阻尼系数，得出其平均值。(在数据处理中给出计算阻尼系数过程的例子，其他填入表格即可)

表 4-5 测量扭摆在自由状态下的固有振动频率和阻尼系数 β

主要仪器：

精度：

实验台号：

零点角度：	周期数 n : 10		
初始振幅 $A_0/^\circ$	振动时间 t (即 $10T$)/s	第 10 个周期时的振幅 $A_n/^\circ$	阻尼系数 β
30			
40			
50			
60			
70			
80			
90			
100			
120			
140			

2. 阻尼振动：观察阻尼振动现象，测量阻尼系数 β 与阻尼电流的变化关系。

(1) 打开直流稳压电源，按下直流稳压电源开关右侧的小开关 ，此时电机开始转动。然后，按下 PWM 电源的按键 (见附录中图 4-19 的部位 17)，设置为 OFF，电机停止转动，等待摆轮停止摆动。

(2) 使电压在 $0\sim 8V$ 的范围内变化，CH2 的电流约在 $0\sim 0.6A$ 的范围内改变。转动摆轮使其偏离平衡位置并释放 (初始振幅以 $80^\circ\sim 110^\circ$ 最佳)，测量不同阻尼电流、阻尼电

、10 个周期的振动时间和振幅，如表 4-6 所示。计算阻尼系数，描绘阻尼系数随阻尼电流变化的关系曲线。（在数据处理中给出计算阻尼系数过程的例子，其他填入表格即可）

表 4-6 观察阻尼振动现象，测量阻尼系数 β 与阻尼电流的变化关系
主要仪器： 精度： 实验台号：

零点角度： 初始振幅 A_0 ： 周期数 n : 10				
电压 U_β/V	电流 I_β/A	振动时间 t (即 $10T$)/s	第 10 个周期时的振幅 $A_n/\circ$	阻尼系数 β
0				
1.00				
2.00				
3.00				
4.00				
5.00				
6.00				
7.00				
8.00				

3. 受迫振动：测量幅频特性曲线和相频特性曲线

(1) 将 CH1 电压设置为 24 V，CH2 电流和电压设置为与表 4-6 中某一组相同的值（建议阻尼电压为 7 V，与此对应的阻尼系数 β 用来计算相位差 φ ）。按下 PWM 电源的按键， 设置为 ON，电机开始转动并带动摆轮作受迫振动。

(2) 设置“频率”为 800 Hz（此频率不是电机频率，但是电机的转速与 PMW 频率有关），脉宽设置为 70%。耐心观察并等待， 直至摆轮的振幅不再发生变化，用秒表记录驱动电机转动 10 个周期的时间和振幅。

(3) 顺时针转动调速旋钮，每隔 20 Hz 观察并记录摆轮受迫振动的振幅，再据此数据寻找共振点位置。由于在共振点附近曲线变化较大，所以测量数据相对密集一些，此时电机转速极小变化会引起 $\Delta\varphi$ 很大变化。

PMW 频率是参考值，所以在不同 PMW 频率时记下此值，以便实验中需重新测量数据时参考。需测量约 12-16组数据，共振点附近适当增加测试点，如表 4-7 所示。

(4) 根据式（4-53）计算不同频率下的相位差，并以 ω/ω_0 为横坐标， 振幅 A_n 和相位差 φ 为纵坐标，分别画出受迫振动的幅频特性曲线和相频特性曲线。由曲线找出共振 频率， 并与由内容 1 测得的固有振动频率对比。（给出计算 ω 、 ω/ω_0 、 φ 的过程例子及说明，其他数据填入表格）

表 4-7 测量幅频特性曲线和相频特性曲线
主要仪器： 精度： 实验台号：

零点角度： 周期数 n : 10					
PMW 频率/ Hz	时间 t (即 $10T$)/s	第 10 个周期时的振幅 $A_n/\circ$	$\omega=2\pi/T$	ω/ω_0	φ
800					
820					
840					
860					
880					
900					
920					

940					
960					
980					
1000					
1020					
1040					
1060					
1080					

（以上频率为建议频率，在某一PMW频率下测试振幅与上一频率下振幅测不出变化可略过（共振点附近除外），在共振频率附近可加密自选1-2组测量）

4. 根据教师要求观察拍频

【思考题】

1. 实验过程中如何设置实验设备，使波尔振动仪产生自由振动、阻尼振动和受迫振动？
2. 试讨论扭摆建立稳定的受迫振动过程的动力学过程。
3. 列举若干种测量扭摆转动角度和角速度的方法。
4. 任选一组阻尼振动的数据，以摆动角度的平方为横坐标，以角速度的平方为纵坐标画图，讨论与相图的异同。

【附录】波尔共振仪介绍

本实验的装置包括：（1）波尔振动仪，（2）直流稳压稳流电源，（3）秒表，（4）转动传感器和数据采集器，（5）安装了用 LabVIEW 编写的测控程序的计算机。其中，设备（4）和（5）一起构成波尔振动仪摆轮摆动角度和角速度的自动测量系统，用于替代原设备的光电门，其角度测量精度可以达到 0.1° 。

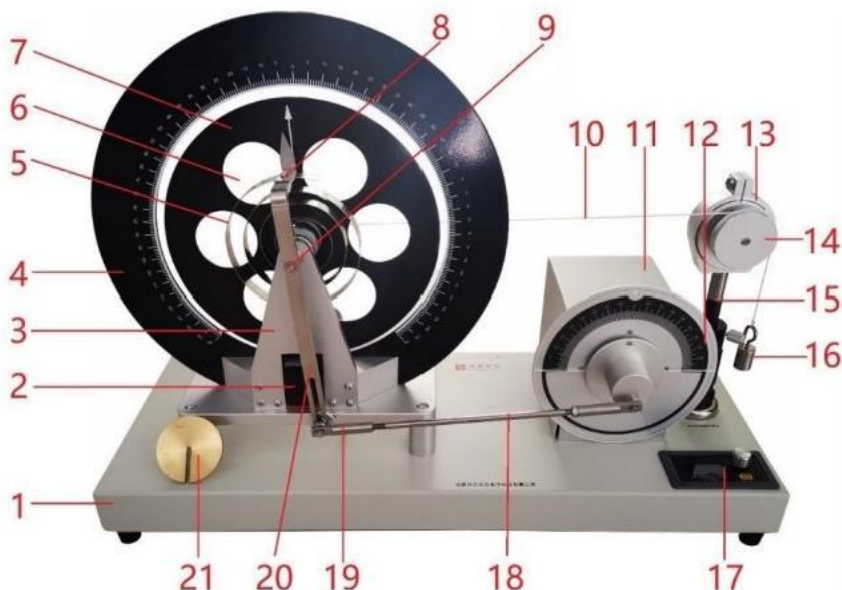


图4-19 波尔摆前视图

1—底座；2—阻尼线圈；3—支撑架；4—外刻度盘；5—蜗卷弹簧；6—摆轮指拨孔；7—圆形摆轮；8—弹簧夹持螺钉；9—摆轮转轴；10—棉线；11—驱动电机(在外壳内)；12—有机玻璃转盘；13—转动传感器；14—传感器转盘；15—传感器支撑柱；16—砝码；17—PWM(脉宽调制)；18—连杆；19—摇杆松紧调节螺丝；20—摇杆；21—金属挂盘(混沌用，本实验不涉及)

1. 波尔振动仪

波尔振动仪结构如图4-19所示。圆形摆轮(7)安装在支撑架(3)上,蜗卷弹簧(5)的一端与摆轮的轴相连,另一端通过弹簧夹持螺钉(8)固定在摇杆(20)上。在弹簧弹性力的作用下,摆轮可绕轴自由往复摆动。在支撑架下方有一对带有铁芯的阻尼线圈(2),摆轮嵌在铁芯的空隙。当阻尼线圈中通过直流电流后,摆轮将受到一个电磁阻尼力的作用。改变电流的大小即可改变阻尼。为使摆轮作受迫振动,在驱动电机(11)的轴上装有偏心轮,通过连杆(18)和摇杆(20)带动摆轮。在电机转轴上装有带刻线的有机玻璃转盘(12),从其上的刻度可以读出摆轮与驱动力之间的相位差 ϕ 。

棉线(10)同时环绕在摆轮的转轴和转动传感器的转盘(14)上,在重约20 g 的砝码(16)的带动下,摆轮和转动传感器的转盘同时转动,可将摆轮的转动角度按一定比例转换成传感器转盘的转动角度,进而用数据采集器加以记录。转动传感器的角度分辨率可达到 0.1° 。

2. 直流稳压稳流电源

直流稳压稳流电源为波尔振动仪的阻尼线圈和驱动电机提供电源。电压调节精度达到 1mV,可精确控制加于驱动电机上的电压,使电机的转速在30-45转/分间连续可调,即外加简谐驱动力的频率在0.5-0.75Hz 间连续可调。